Rédigé par : **Jimmy PAQUEREAU**
Professeur particulier, *Completude*

Questionnaire « géométrique »

Dans ce qui suit, on se place dans l'espace euclidien à trois dimensions.
On se donne $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace en question.

Opérations élémentaires sur les vecteurs

Définir :

(i) La multiplication par un scalaire $k \in \mathbb{R}$
(ii) La somme vectorielle
(iii) La norme
(iv) Le produit scalaire

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Propriétés élémentaires sur les vecteurs

Montrer que :

(i) La somme vectorielle est commutative et associative
(ii) Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition
(iii) La norme d'un produit scalaire est égale aux produits des normes

……

……

……

……

………

………

………

………

………

Orthogonalité et colinéarité (définitions)

Définir :

(i) L'orthogonalité
(ii) La colinéarité

………

………

………

………

Orthogonalité et colinéarité (propriétés)

Montrer que :

(i) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle$ *(théorème d'Al Kashi encore appelé loi des cosinus)*
(ii) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux *(théorème de Pythagore)*

………

………

………

………

………

………

Equation paramétrique et cartésienne d'un plan

Sachant qu'un plan de l'espace euclidien à trois dimensions peut se définir de la manière suivante :

Soient $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $O(x_0; y_0; z_0)$ respectivement un vecteur et un point de cet espace. Le plan (P) est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que : $\vec{n}.\overrightarrow{OM} = 0$.

Monter que :

(i) $\exists\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\ /\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ (équation cartésienne d'un plan)
(ii) Donner une équation paramétrique de ce plan.

……

……

……

……

……

……

……

Distance à un plan

Montrer que :
La distance d'un point $M\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix}$ à un plan (P) d'équation $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(M,(P)) = \frac{|ax_m + by_m + cz_m|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

……

……

……

……

……

……

………

………

………

………

………

………

Sphère

Donnez-en une équation. Comment déterminer l'intersection d'un plan et d'une sphère ? Quelle peut-elle être ?

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Trigonométrie (quelques valeurs remarquables)

$cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ $sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$

$cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$ $sin(\ 12\pi\ ) =$

$tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$ $cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$e^{-i\frac{\pi}{6}} =$ $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} = re^{i\phi}$ $\phi =$ $r =$

Trigonométrie (quelques formules)

Sachant que : $\theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$ avec $i^2 = -1$
Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

(i) $sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$
(ii) $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$
(iii) $tan(a+b) = \frac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)tan(b)}$
(iv) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(cosa + isinb)^n = cos(na) + isin(na)$ (formule de Moivre)

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Trigonométrie (quelques formules)

Sachant que : $\theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$ avec $i^2 = -1$
Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

(i) $sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$
(ii) $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$
(iii) $tan(a+b) = \frac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)tan(b)}$
(iv) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(cosa + isinb)^n = cos(na) + isin(na)$ (formule de Moivre)

………

………

………

……

……

……

……

……

……

……

Trigonométrie (linéarisation des polynômes trigonométriques)

Sachant que : $\forall n, \theta \in \mathbb{N} \times \mathbb{R},\ \ cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}\ \ et\ \ sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$ (formules d'Euler)

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ cos^3(x)sin^2(x) = -\frac{1}{16}(cos5x + cos3x - 2sinx)$

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Rappeler la formule du binôme de Newton : $\forall n, a, b \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^2$, ………………………………………………………

Relation de Chasles

Démontrer la proposition suivante :

$Soient\ A, B\ et\ C\ trois\ points\ de\ l'espace\ euclidien$ à $trois\ dimensions. Alors\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

....

....

....

Point milieu

On rappelle que le milieu d'un segment [AB] est le point aligné avec A et B équidistant de A et de B.

$Soient\ A(x; y; z), B(x'; y'; z'). Montrer\ que\ le\ point\ de\ coordonnées\ \left(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}; \frac{z+z'}{2}\right)$ $est\ bien\ le\ milieu\ du\ segment.$ (C'est évident certes, mais encore faut-il le prouver)

....

....

....